Άσκηση

1) Έστω X σύνολο, $\mathcal{A}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X, $\mu: \mathcal{A} \to [0,+\infty)$ να είναι σ-προσθετικό μέτρο. Έστω $A, B, \Gamma \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < +\infty$, $\mu(B) < +\infty$, $\mu(\Gamma) < +\infty$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των εξής συνόλων

1) $\mu((A \cup B) \cap \Gamma)$

2) $\mu((A \cup B) \setminus \Gamma)$

3) $\mu(A \cup (B \cap \Gamma))$

4) $\mu(A \cup (B \setminus \Gamma))$

Λύση

1) $\mu((A \cup B) \cap \Gamma)$

Ισχύει: $(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$

Παίρνω μέτρα: $\mu((A \cup B) \cap \Gamma) = \mu((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma))$

$= \mu(A \cap \Gamma) + \mu(B \cap \Gamma) - \mu((A \cap \Gamma) \cap (B \cap$

$= \mu(A \cap \Gamma) + \mu(B \cap \Gamma) - \mu(A \cap B \cap \Gamma)$

2) $\mu(A\cup(B\cap\Gamma)) = \mu(A) + \mu(B\cap\Gamma) - \mu(A\cap(B\cap\Gamma))$

Στις (1), (2) βλέπουμε ότι οι προσθετέοι
είναι διαφορετικά σύνολα.
Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να κοιτάμε την
προτεραιότητα των πράξεων.

Σχόλιο!

3) $\mu((A\cup B)\setminus\Gamma) = \mu((A\cup B)\setminus((A\cup B)\cap\Gamma))$

$= \mu(A\cup B) - \mu((A\cup B)\cap\Gamma)$

$= \mu(A)+\mu(B) - \mu(A\cap B) - (\mu(A\cap\Gamma)+\mu(B\cap\Gamma) - \mu(A\cap B\cap\Gamma))$

$= \mu(A)+\mu(B) - \mu(A\cap B) - \mu(A\cap\Gamma) - \mu(B\cap\Gamma) + \mu(A\cap B\cap\Gamma)$

το m θα το χρησιμοποιούμε
στο μέτρο Lebesgue και για
ορθογώνια σύνολα.
Ενώ, το μ είναι γενικά σαν μέτρο.

Παρατήρηση!

Γενικά ισχύει
$A\setminus B = A\setminus(A\cap B)$

Σχόλιο!

$m(A\setminus B) = m(A) - m(A\cap B)$

Σχόλιο!

1) $\mu(A\cup(B\setminus\Gamma)) = \mu(A) + \mu(B\setminus\Gamma) - \mu(A\cap(B\setminus\Gamma))$

$= \mu(A) + \mu(B) - \mu(B\cap\Gamma) - \mu(A\cap(B\setminus\Gamma))$ (1)

$A\cap(B\setminus\Gamma) = (A\cap B)\setminus(A\cap\Gamma)$: ΙΣΧΥΕΙ ΠΑΝΤΑ

Άρα, $\mu(A\cap(B\setminus\Gamma)) = \mu((A\cap B)\setminus(A\cap\Gamma))$

$$= \mu(A\cap B) - \mu((A\cap B)\cap(A\cap\Gamma))$$

$$= \mu(A\cap B) - \mu(A\cap B\cap\Gamma) \quad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} \mu(A\cup(B\setminus\Gamma)) = \mu(A)+\mu(B)-\mu(B\cap\Gamma)-\mu(A\cap B)+\mu(A\cap B\cap\Gamma)$$

□

Στις (3), (4) έχουμε κάτι ανάλογο.
Δηλαδή $(A\cup B)\setminus\Gamma$ και $A\cup(B\setminus\Gamma)$ τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά. Δηλαδή, έχουμε σειρά προτεραιότητας.

Σχόλιο

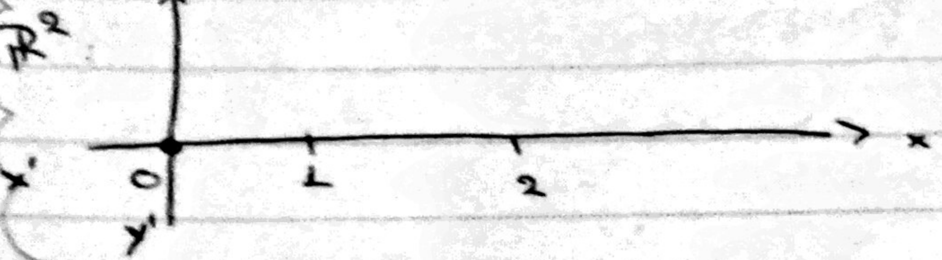
Οι ασκήσεις που κάναμε, ισχύουν και για <u>πεπερασμένο</u> πλήθος συνόλων

Παρατήρηση

$\mathbb{R}$:

m: μέτρο Lebesgue $\mu([1,2]) = 2-1$
$\underset{m_1}{=} 1$

$\mathbb{R}^2$:



$[1,2]\times\{0\}$

$m_2([1,2]\times\{0\}) = \nu([1,2]\times\{0\})$
$= \mu([1,2])\,\mu(\{0\}) = 1\cdot 0 = 0$

°° Παρατήρηση !

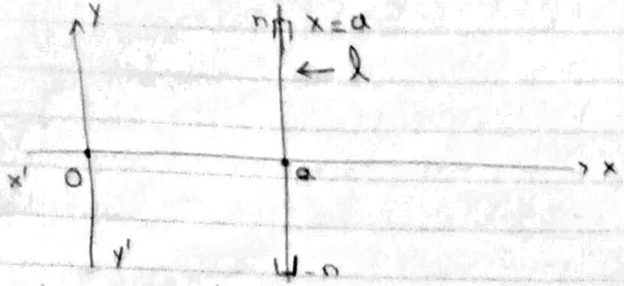
2| Θεωρούμε την ευθεία ℓ του επιπέδου με καρτεσιανή εξίσωση $x=a$, όπου $a\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η ℓ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και ότι $m_2(\ell)=0$

SOS (σαν ερώτηση θεωρίας)

Τα υποσύνολα της σ-άλγεβρας M_{m^*} ονομάζονται Lebesgue μετρήσιμα σύνολα

°Σχόλιο❢

Λύση



τα κλειστά σύνολα είναι Lebesgue μετρήσιμα

°Σχόλιο

Είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο επειδή είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$

Έστω x_n, ακολουθία, $x_n \in A$ των $x_n \to x_0 \Rightarrow x_0 \in A$.
Τότε το A είναι κλειστό σύνολο, και ισχύει σε οποιοδήποτε γραμμικό χώρο

°Σχόλιο❢

Η l μπορεί να γραφτεί ως εξής: $l = \{a\} \times \mathbb{R}$
Τα σημεία της καρτεσιανής εξίσωσης $x = a$ είναι τα εξής
(a, x), με $x \in \mathbb{R}$
Παίρνω την ακολουθία (a, x_n) η οποία συγκλίνει στο (γ, δ)
Τότε, αναγκαστικά $a = \gamma$ και $x_n \to \delta$, $\delta \in \mathbb{R}$.

Άρα, η l είναι Lebesgue μετρήσιμο

Ένα τετράγωνο ή ένα ορθογώνιο είναι κλειστό σύνολο

°Σχόλιο❢

$$H \quad l = \{a\} \times \mathbb{R} = \{a\} \times \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [-n, n]\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\{a\} \times [-n, n]\right)$$

$$A \times \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \times B_n)$$

είναι κλειστό $\Rightarrow$ Lebesg μετρήσιμο και ανήκει στην σ-άλγεβρα
Άρα και η ένωση θα ανήκει M_{m^*}

$m : \mathcal{M}_{m^*} \rightarrow [0,+\infty)$

$m(\{a\}\times[-n,n]) = \nu(\{a\}\times[-n,n]) = \mu(\{a\})\,\mu([-n,n])$

$= 0\,(n-(-n)) = 0 \cdot 2n = 0 \quad , \forall n\in\mathbb{N}$

Από την σ-υποπροσθετικότητα του μέτρου Lebesgue έπεται ότι

$$0 \le m(\ell) = m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(\{a\}\times[-n,n])\right) \overset{\text{σ-υποπροσθετικότητα}}{\le} \sum_{n=1}^{+\infty} m(\{a\}\times[-n,n])$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$$

$\Rightarrow 0 \le m(\ell) \le 0 \Rightarrow \boxed{m(\ell)=0}$ □

Κάναμε την απόδειξη για x = a

Μπορούμε να το κάνουμε για οποιαδήποτε ευθεία στο επίπεδο

SOS Άσκηση για $y = a$ να κάνω ακριβώς το ίδιο

Θέμα για πρόοδο

!! ΠΡΟΣΟΧΗ !!

3) ΝΔΟ $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$ (m_n: το μέτρο Lebesgue στον χώρο $\mathbb{R}^n$, $m_n = m$)

Λύση

$\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}^{n \text{ φορές}}$ ⇒ καρτεσιανό γινόμενο

Είναι Lebesgue μετρήσιμο, επειδή το $\mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό κ κλειστό σύνολο

Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της μονοτονίας

$\underbrace{[-n_0,n_0]\times[-n_0,n_0]\times\dots\times[-n_0,n_0]}_{n_0 \text{ φορές}} = [-n_0,n_0]^{n_0} \quad , n_0\in\mathbb{N}$

Το $[-m,m]^{n_0}$ είναι κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}^{n_0}$ και κλειστό σύνολο.
Συνεπώς, είναι Lebesgue μετρήσιμο.

$$m([-m_0,m_0]^{n_0}) = V([-m_0,m_0]^{n_0})$$
$$= \underbrace{(m_0-(-m_0))\cdots(m_0-(-m_0))}_{n_0 \text{ φορές}} = (2m_0)^{n_0}$$

Για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$, $m([-\nu,\nu]^{n_0}) = (2\nu)^{n_0}$

Όμως, $[-\nu,\nu]^{n_0} \subseteq \mathbb{R}^{n_0} \Rightarrow m([-\nu,\nu]^{n_0}) \le m(\mathbb{R}^{n_0})$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow m(\mathbb{R}^{n_0}) \ge (2\nu)^{n_0} \quad \forall\nu\in\mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \boxed{m(\mathbb{R}^{n_0}) = +\infty}.$$

□

ΠΡΟΟΔΟΣ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΑΜΑΤΑΕΙ ΕΔΩ

* ——————— * ———————

Ορισμός διανυσματικού χώρου (από την γραμμική άλγεβρα)

Ο $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός χώρος με τις εξής πράξεις:

$+: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Αν $x_0 = (x_1, x_2, \dots x_n)$ $y_0 = (y_1, y_2, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$

Τότε $+((x_0,y_0)) \overset{\text{ορ}}{=} x_0+y_0 = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots x_n+y_n)$

και ορίζεται και ο αριθμητικός πολ/μος $\cdot: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

όπου $\cdot(\lambda,x_0) = \lambda x_0 = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots \lambda x_n)$, $\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $\forall x_0\in\mathbb{R}^n$

Η δομή $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος στο $\mathbb{R}$.
Έχει διάσταση n. Μια βάση του n κανονική είναι η
$\{e_1, e_2, \dots e_n\}$, $e_i = (0,0,\dots,\underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{1},\dots 0)$

Εστω X να ειναι τυχον συνολο. Θεωρουμε το συνολο

$$\mathcal{L} := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid η\ f \text{ ειναι συναρτηση} \}$$

Στο $\mathcal{L}$ μπορουμε να ορισουμε δομη διανυσματικου χωρου.

(1) $f, g \in \mathcal{L}$, $f+g : X \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\forall x \in X$

(2) $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}$, $\lambda \cdot f : X \to \mathbb{R}$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$

Ορίζουμε το άθροισμα και το αριθμητικο γινομενο αριθμου επι συναρτηση, μ' αυτους τους κανονες. ((1), (2)).

Το συνολο $\mathcal{L}$ με τις συγκεκριμενες πραξεις αποτελει διανυσματικο χωρο, πανω στο $\mathbb{R}$.

$\mathcal{L}$ Ιδιότητες

1) $(\lambda+\mu) \cdot f = \lambda f + \mu f$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{L}$

Εστω $x_0 \in X$.

$$((\lambda+\mu) f)(x_0) \overset{op}{=} (\lambda+\mu) f(x_0) \underset{\text{πραγμ.}}{\overset{\text{επιμερ}}{=}} \lambda \cdot f(x_0) + \mu \cdot f(x_0)$$

$$\overset{op}{=} (\lambda f)(x_0) + (\mu f)(x_0) \quad \text{(απο τον ορισμό του αριθμητικου πολλ/σμ.)}$$

$$= (\lambda f + \mu f)(x_0) \quad \text{(άθροισμα)}$$

Αυτο συμβαινει $\forall x_0 \in X$

Αρα, $(\lambda+\mu) f = \lambda f + \mu f$ □

2) $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \overbrace{f, g}^{\text{καλά ορισμένος}} \in \mathcal{L}$

Εστω λοιπόν $x_0 \in X$.

$$(\lambda(f+g))(x_0) \overset{op}{=} \lambda(f+g)(x_0) \overset{op}{=} \lambda(f(x_0) + g(x_0))$$

$$\underset{\text{πραγμ.}}{\overset{\text{επιμεριστ.}}{=}} \lambda f(x_0) + \lambda g(x_0) \overset{op}{=} (\lambda f + \lambda g)(x_0)$$

Αυτο συμβαινει $\forall x_0 \in X$

Αρα $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$ (ισοτητα συναρτήσεων)